Asymptoten

Asymptoten sind Näherungsgeraden, denen sich der Kurvenverlauf einer Funktion annähert.

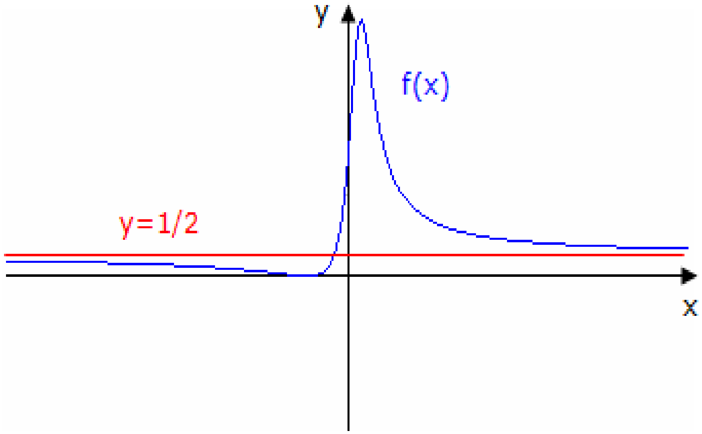
- Es gibt waagrechte, senkrechte und schiefe Asymptoten.
- Senkrechte Asymptoten nennt man auch Polstellen, schiefe Asymptoten nennt man asymptotische Kurven.
- Mathematische Hilfsmittel zur Berechnung von Asymptoten: Limes und Polynomdivision.

Hinweis: Im G8-Abitur werden schiefe Asymptoten und Polynomdivision nicht mehr verlangt.

Waagrechte Asymptoten

Wie findet man waagrechte Asymptoten?

Bilde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



Gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ so hat $f(x)$ eine waagrechte Asymptote bei $y = a$.

Gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ so hat $f(x)$ **keine** waagrechte Asymptote. Hier werden die Funktionswerte beliebig groß bzw. beliebig klein.

Waagrechte Asymptoten

Bei gebrochen rationalen Funktionen kann man waagrechte Asymptoten schnell erkennen!

- Zählergrad größer Nennergrad: keine waagrechten Asymptoten.

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

- Zählergrad kleiner Nennergrad: waagrechte Asymptote bei $y = 0$ (das ist die x-Achse).

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

- Zählergrad = Nennergrad: waagrechte Asymptote bei $y = a/b$ wobei a und b die „höchsten“ Koeffizienten sind.

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \frac{a}{b}$$

Rechenbeispiele

Untersuche $f(x) = \frac{2x^2+5x+3}{4x^2-2x+1}$, $g(x) = \frac{-x^3+2}{3x^3-x^2+2}$, $h(x) = \frac{5x^3-7}{x^2+x-3}$ und $k(x) = \frac{8x+12}{x^4-1}$ auf waagrechte Asymptoten.

Lösung:

In f und g betrachte die führenden Koeffizienten (also diejenigen bei den höchsten Exponenten):

$f(x) = \frac{\mathbf{2}x^2+5x+3}{\mathbf{4}x^2-2x+1}$ bzw. $g(x) = \frac{\mathbf{-1}x^3+2}{\mathbf{3}x^3-x^2+2}$.

Daran erkennt man $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ bzw. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\frac{1}{3}$

Rechenbeispiele

Bei $h(x) = \frac{5x^3-7}{x^2+x-3}$ ist der Zählergrad höher als der Nennergrad, daher ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \pm\infty$.

Bei $k(x) = \frac{8x+12}{x^4-1}$ ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad und es folgt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} k(x) = 0$.

Ergebnis: $f(x)$ hat eine waagrechte Asymptote bei $y = \frac{1}{2}$, $g(x)$ bei $y = -\frac{1}{3}$, $h(x)$ hat keine waagrechte Asymptote und $k(x)$ hat die x-Achse als waagrechte Asymptote.